æ

KOLOKWIUM, Topologia I, 19.11.18, TEMAT A

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każda kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego oraz temat kolokwium (A lub B). **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 1. A. (15pkt). Niech $A = Q \cap (0,1]$ i niech d_k i d_r będą odpowiednio metrykami kolejową i rzeczną na płaszczyźnie R^2. Zdefiniujmy podzbiór $X \subset R^2$ wzorem

$$X = \left(\bigcup_{q \in A} \{q\} \times (0,q) \right) \cup ([0,1] \times \{0\}).$$

Czy punkt płaszczyzny $(1/3, 1/3)$ należy do domknięcia X w topologiach generowanych przez każdą z tych metryk ? Znaleźć $\mathrm{Int}X$ w obu topologiach.

B. (10pkt). Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną podzbiorów U prostej R takich, że $R \setminus U$ jest skończony lub przeliczalny. Uzasadnić, że rodzina $\mathcal{T}$ po dołączeniu do niej zbioru pustego definiuje topologię na prostej $\mathbf{R}$. Znaleźć domknięcie zbioru liczb niewymiernych w tej topologii.

Zadanie 2. A. (10pkt). Niech $f : R^2 \to R^2$ będzie funkcja zdefiniowana wzorem $f(x,y) = (x+1, 2x)$. Sprawdzić ciągłość funkcji f w punktach $(-1,-1)$ i $(-2,0)$ w przypadku gdy w dziedzinie funkcji mamy topologię indukowana przez metrykę rzeczną a w przeciwdziedzinie metrykę kolejową.

B. (15pkt). Niech $X = [0,1] \times [0,1] \subset R^2$ i $Y = [-1,0] \times [-1,0] \subset R^2$. Funkcja $f : R^2 \to R^2$, $f((x,y) = (-x,-y)$ odwzorowuje X w Y i Y w X. Rozpatrzmy na X topologie kwadratu leksykograficznego a na Y topologię euklidesową. Czy któreś z odwzorowań $f : X \to Y$ i $f : Y \to X$ jest ciągłe? Przeanalizować to samo pytanie, gdy obie funkcje ograniczymy do kwadratów bez brzegu.

Zadanie 3.(25pkt). Niech $B = Q \cap [0,1]$, a N oznacza zbiór liczb naturalnych. Zdefiniujmy trzy podzbiory prostej euklidesowej $X_1 = B \cup \{-1/n; n = 1,2,...\}$, $X_2 = B \cup \{-1/n; n = 1,2,...\} \cup \{1 + 1/n; n = 1,2,...\}$, $X_3 = B \cup N$. Czy istnieją indeksy j i k takie, że przestrzeń X_j jest homeomorficzna z X_k ?

Zadanie 4. A. (10pkt). W kwadracie leksykograficznym znaleźć domknięcie zbioru $(1/2, 2/3] \times 0$. Czy podzbiór $[1/2, 2/3] \times 0$ kwadratu leksykograficznego jest zwarty?

B. (15pkt). Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni Hausdorffa X na przestrzeń metryczną Y, przeprowadzającym zbiory domknięte w X na zbiory domknięte w Y. Niech ciąg $y_n \in Y$, $n = 1,2,...$ zbiega do $y_0 \in Y$. Wykazać, że jeśli każdy zbiór $f^{-1}(y_n)$, $n = 0,1,2,...$ jest zwarty, to także suma $\bigcup_0^\infty f^{-1}(y_n)$ jest zbiorem zwartym.